Równanie różniczkowe zupełne

Niech będą dane funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ posiadające ciągłe pochodne pierwszego rzędu w pewnym płaskim obszarze D, a ponadto niech funkcja $Q(x,y)$ nie przyjmuje wartości zero w żadnym punkcie tego obszaru.

Równanie różniczkowe $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ można zapisać w równoważnej postaci

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

gdzie: $dx \neq 0$ jest różniczką zmiennej niezależnej x, dy zaś różniczką niewiadomej funkcji $y(x)$.

Definicja 1 Mówimy, że równanie (1) jest <u>równaniem różniczkowym zupełnym</u>, gdy istnieje funkcja $u(x,y)$ posiadająca ciągłe pochodne cząstkowe do drugiego rzędu włącznie w obszarze D, której <u>różniczka zupełna</u> równa się lewej stronie tego równania, a więc gdy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \quad i \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$$

w obszarze D.

Np. równanie $2x\,dx + 3y^2dy = 0$ jest <u>zupełne</u> w dowolnym obszarze płaskim D, ponieważ lewa strona tego równania jest różniczką zupełną funkcji $u(x,y) = x^2 + y^3$.

Twierdzenie 1 Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ klasy C^1 (tzn. mające ciągłe pochodne pierwszego rzędu) w obszarze $D = \{(x,y);\ x \in (a,b) \wedge y \in (c,d)\}$ spełniają warunek $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ oraz funkcja $Q(x,y)$ nie przyjmuje wartości zero w żadnym punkcie tego prostokąta, to wzór $u(x, y(x)) = C$, w którym funkcja $u(x,y)$ jest określona równością

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y)dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,t)dt, \qquad (2)$$

przedstawia całkę ogólną równania różniczkowego (1), a ponadto przez każdy punkt (x_0, y_0) prostokąta D przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa tego równania.

Przykład 1 Znaleźć całkę ogólną równania

$$(x^3+xy^2+1)dx+(x^2y+y^3)dy=0 \qquad (3)$$

Ponieważ: $\frac{\partial P}{\partial y}=2xy$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy$

więc w obszarze D bez punktów osi Ox, są spełnione wszystkie założenia twierdzenia 1.

Zgodnie ze wzorem (2) otrzymujemy:

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}(x^3+xy^2+1)dx+\int_{y_0}^{y}(x_0^2y+y^3)dy=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+x+\frac{x_0^2y^2}{2}+\frac{y^4}{4}+C_1$$

gdzie: C_1 jest pewną stałą zależną od obranego punktu (x_0,y_0) obszaru D.

Zatem wzór

$$\frac{x^4}{4}+\frac{x^2y^2}{2}+x+\frac{x_0^2y^2}{2}+\frac{y^2}{4}=C$$

przedstawia całkę ogólną równania (3)

Czynnik całkujący

Przypuśćmy, że równanie $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ nie jest równaniem różniczkowym zupełnym. Weźmy pod uwagę funkcję $\mu(x,y)$ klasy C^1 w obszarze D.

Załóżmy ponadto, że tej samej klasy są w tym obszarze funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$.

Rozważmy równanie

$$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0 \qquad (4)$$

będące wynikiem obustronnego pomnożenia równania (1) przez $\mu(x,y)$.

Definicja 2 Mówimy, że funkcja $\mu(x,y)$ jest czynnikiem całkującym równania (1), gdy równanie (4) jest równaniem różniczkowym zupełnym w obszarze D.

Inaczej mówiąc, funkcja $\mu(x,y)$ jest czynnikiem całkującym równania (1) ~~gdy równanie~~ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia w obszarze D równanie

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

Przykład 2 Równanie

$$(3x+2y+y^2)dx + (x+4xy+5y^2)dy = 0 \qquad (5)$$

nie jest równaniem różniczkowym zupełnym, ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2+2y \quad i \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1+4y \quad \text{czyli warunek}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$ nie jest spełniony w żadnym obszarze płaskim.

Mnożąc równanie (5) przez (odpowiednią) funkcję $\mu(x,y) = x+y^2$ otrzymamy

$$(x+y^2)(3x+2y+y^2)dx + (x+y^2)(x+4xy+5y^2)dy = 0$$

czyli

(6) $$(3x^2+2xy+4xy^2+2y^3+y^4)dx + (x^2+4x^2y+6xy^2+4xy^3+5y^4)dy = 0$$

Z łatwością możemy sprawdzić, że równanie (6) jest równaniem różniczkowym zupełnym w dowolnym obszarze płaskim. (na ćwiczenia). Zatem funkcja $\mu(x,y) = x+y^2$ jest czynnikiem całkującym równania (5).

Inne podejście do równania różniczkowego zupełnego

Niech będzie dane równanie różniczkowe zupełne.

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0 \qquad (7)$$

Aby rozwiązać to równanie wystarczy znaleźć funkcję $\varphi(t,x)$ taką, by $M(t,x) = \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}$ oraz $N(t,x) = \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x}$

Jeśli znajdziemy funkcję $\varphi(t,x)$ spełniającą powyższe równości, to rozwiązaniem ogólnym równania (7) będzie

$$\varphi(t,x) = C \quad \text{gdzie} \quad C \in \mathbb{R}$$

Aby znaleźć funkcję $\varphi(t,x)$, całkujemy funkcję $M(t,x)$ po zmiennej t. Otrzymujemy

$$\varphi(t,x) = \int M(t,x)dt + g(x) \qquad (8)$$

gdzie: $g(x)$ jest pewną, na razie nieznaną funkcją klasy C^1.

Aby wyznaczyć g, liczymy pochodną po x z obu stron równania

Otrzymujemy $\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} = N(t,x) = \frac{\partial\left(\int M(t,x)\,dt\right)}{\partial x} + g'(x)$

Stąd wyznaczamy $g'(x) = N(t,x) - \frac{\partial\left(\int M(t,x)\,dt\right)}{\partial x}$

Całkując po x otrzymamy $g(x)$ a zatem postać funkcji:

$$\varphi(t,x) = \int M(t,x)\,dt + g(x).$$

Przykład 3 Rozwiązać równanie różniczkowe

$$(t+x)\,dt + (t-x)\,dx = 0 \qquad (9)$$

Tu $M(t,x) = t+x$ oraz $N(t,x) = t-x$. Łatwo sprawdzić, że $\frac{\partial M}{\partial x} = 1 = \frac{\partial N}{\partial t}$, a więc równanie (9) jest zupełne.

Obliczam $\varphi(t,x) = \int M(t,x)\,dt = \frac{t^2}{2} + tx + g(x)$

$$N(t,x) = t - x = \frac{\partial\left(\frac{t^2}{2} + tx + g(x)\right)}{\partial x} = t + g'(x) \to t - x = t + g'(x)$$

Skąd $g'(x) = -x$

Zatem całkując po x otrzymamy $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + C$.

Czyli $\varphi(t,x) = \frac{t^2}{2} + tx - \frac{1}{2}x^2 + C$.

Przykład 4 Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\,dx + \frac{e^y}{1+x^2}\,dy = 0 \qquad (10)$$

1. Sprawdzamy czy równanie (10) jest zupełne czyli czy $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot(-e^y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^y\left(-\frac{1}{(1+x^2)^2}\cdot 2x\right)$. Widać, że oba wyrażenia są takie same.

2. Szukamy funkcji $F(x,y)$, takiej aby $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ i $\frac{\partial F}{\partial x} = P$.

Wyznaczamy $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{e^y}{1+x^2}$

Całkując względem y otrzymamy $F(x,y) = \int \frac{e^y\,dy}{1+x^2} = \frac{e^y}{1+x^2} + \varphi(x)$

Obliczamy $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2x\cdot e^y}{(1+x^2)^2} + \varphi'(x) = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$ stąd $\varphi'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$

Całkując $\varphi'(x)$ po x otrzymujemy

$$\varphi(x) = \int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-1} dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} + C$$

Czyli $\varphi(x) = -\frac{1}{1+x^2} + C$

Ostatecznie $F(x,y) = \frac{e^y}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} + C = \frac{e^y - 1}{1+x^2} + C$

Równania różniczkowe drugiego rzędu sprowadzalne do równań różniczkowych pierwszego rzędu.

Zostaną omówione tylko niektóre z takich równań.

A. Równanie typu $F(x, y', y'') = 0$ (11) Zauważmy że w równaniu nie występuje y.

Za pomocą podstawienia $y' = u$ wprowadzamy nową funkcję niewiadomą $u(x)$.

Mamy stąd $y'' = u'$, skąd wynika że rozwiązanie rozpatrywanego równania (11) można sprowadzić do rozwiązywania równania

$$F(x, u, u') = 0 \qquad (12)$$

Niech całka ogólna równania (12) ma postać $\varphi(x, u, C_1) = 0$

Stąd uwzględniając, że $y' = u$, otrzymamy równanie różniczkowe rzędu pierwszego

$$\varphi(x, y', C_1) = 0 \qquad (13)$$

z funkcją niewiadomą $y(x)$. Rozwiązując równanie (13) otrzymamy całkę ogólną równania (11). W tej całce wystąpi oprócz stałej C_1 jeszcze druga stała dowolna C_2

Przykład 5. Znaleźć całkę szczególną równania

$$y'' = y' \ln y' \qquad (14)$$

spełniającą warunki początkowe $y(0) = 2$ i $y'(0) = 1$

Wprowadzamy nową funkcję niewiadomą $u(x)$ za pomocą podstawienia:

$$y' = u \qquad (15)$$

Stąd $y'' = u'$. W ten sposób rozwiązywanie równania (14) sprowadzamy do rozwiązywania równania pierwszego rzędu

$$u' = u \cdot \ln u \qquad (16)$$

Całka ogólna równania (16) ma postać $\ln u = C_1 e^x$

(bo $u' = u \cdot \ln u \rightarrow \frac{du}{dx} = u \ln u \;/ : \frac{u \ln u}{dx} \rightarrow \frac{du}{u \ln u} = dx$

$\rightarrow \int \frac{\frac{1}{u} du}{\ln u} = \int dx \rightarrow \ln(\ln u) + \ln C = x \rightarrow \ln(C \ln u) = x$

zatem $e^x = C \cdot \ln u \rightarrow \underline{\ln u = C_1 e^x}$)

Stąd wobec $y' = u$ mamy $\ln y' = C_1 e^x$. Korzystając z drugiego warunku początkowego znajdujemy $C_1 = 0$

Zatem $y' = e^0 = 1$ oraz $y = x + C_2$ (po całkowaniu)

Korzystając z pierwszego warunku początkowego znajdujemy $C_2 = 2$. Ostatecznie

$$y = x + 2$$

jest szukaną całką szczególną równania (14).

B. Równanie typu $F(y, y', y'') = 0$ (17)

W równaniu tego typu nie występuje zmienna niezależna x. W równaniu (17) będziemy traktować y jako zmienną niezależną nowej niewiadomej funkcji $u(y)$, którą wprowadzimy za pomocą podstawienia

$$y' = u(y) \qquad (18)$$

Mamy zatem $y'' = u'(y)\cdot y' = u'\cdot u$ skąd wynika, że rozwiązywanie równania (17) można sprowadzić do rozwiązywania równania

$$F(y, u, uu') = 0 \qquad (19)$$

Niech $\varphi(y, u, C_1) = 0$ będzie całką ogólną równania (19). W całce tej oprócz stałej C_1 wystąpi jeszcze druga dowolna stała C_2.

Przykład 6. Znaleźć całkę ogólną równania różniczkowego.

$$1 + (y')^2 = 2yy'' \qquad (20)$$

Wprowadzając nową funkcję niewiadomą $u = u(y)$ za pomocą podstawienia (18) mamy też $y'' = u'y' = u'u$ więc otrzymujemy równanie pierwszego rzędu

$$2yuu' = 1 + u^2 \qquad (21)$$

Całka ogólna równania (21) ma postać $1 + u^2 = C_1 y$ bo

$$1+u^2 = 2yu\frac{du}{dy} \to 1 = \frac{2u}{1+u^2}\cdot y\frac{du}{dy} \,/ : y \to \frac{1}{y} = \frac{2u}{1+u^2}\frac{du}{dy} \to$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2u\,du}{1+u^2} \to \ln y = \ln(1+u^2) + \ln C \to \ln y = \ln C(1+u^2)$$

$$y = C(1+u^2) \to 1+u^2 = C_1 y \quad \left(C_1 = \frac{1}{C}\right).$$

Wobec (18) mamy $(y')^2 = C_1 y - 1$, bo z $1+u^2 = C_1 y$ wynika, że $u^2 = C_1 y - 1$ ale ponieważ $y' = u$ więc $(y')^2 = u^2$.

Stąd $y' = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$. Po scałkowaniu ostatniego równania otrzymamy całkę ogólną równania (2) postaci

$$y = \frac{C_1}{4}(C_2 \pm x)^2 + \frac{1}{C_1}$$

Równania różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Definicja 3. Równanie postaci

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (22)$$

gdzie p i q są to dane liczby rzeczywiste nazywamy jednorodnym równaniem różniczkowym liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach.

Rozwiązania równania (22) poszukujemy w postaci funkcji wykładniczej

$$y = e^{rx} \qquad (23)$$

gdzie: liczba r jest liczbą niewiadomą, którą postaramy się tak dobrać, aby funkcja (23) spełniała równanie (22).

Ponieważ $y' = re^{rx}$ a $y'' = r^2 e^{rx}$ więc funkcja (23) spełnia równanie (22) wtedy i tylko wtedy, gdy liczba r jest pierwiastkiem równania kwadratowego

$$r^2 + pr + q = 0 \qquad (24)$$

Równanie (24) nazywamy równaniem charakterystycznym dla równania (22)

Uwaga Po podstawieniu $y' = re^{rx}$ i $y'' = r^2 e^{rx}$ ~~do~~ i $y = e^{rx}$ do równania (22) otrzymujemy

$$r^2 e^{rx} + p \cdot re^{rx} + qe^{rx} = 0$$

Po wyłączeniu e^{rx} przed nawias otrzymamy

$$e^{rx} \cdot (r^2 + pr + q) = 0 \qquad (*)$$

Ponieważ $e^{rx} > 0$ dla dowolnego r i x więc aby równanie $(*)$ było spełnione musi być

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Rozpatrzymy przypadki możliwych rozwiązań równania (24

A. Przypadek $\Delta = p^2 - 4q > 0$

Równanie (24) ma wtedy dwa różne pierwiastki rzeczywiste r_1 i r_2.

Funkcje $y_1(x) = e^{r_1 x}$ i $y_2(x) = e^{r_2 x}$ są więc rozwiązaniami równania (22)

Wzór $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ przedstawia zatem rozwiązanie ogólne równania (22).

Przykład 7 Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y'' + 5y' + 4y = 0 \qquad (25)$$

Równanie charakterystyczne ma postać:

$$r^2 + 5r + 4 = 0, \quad \Delta = 9 \quad \text{zatem } r_1 = -1,\ r_2 = -4.$$

Zatem $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cdot e^{-4x}$ jest całką ogólną równania (25)

B. Przypadek $\Delta = p^2 - 4q = 0$

Równanie charakterystyczne ma w tym przypadku ~~[illegible]~~ jeden pierwiastek rzeczywisty, podwójny $r_0 = -\frac{p}{2}$

Dysponujemy więc dopiero jedną całką szczególną $y_1 = e^{r_0 x}$.

Zauważmy, że $y = Ce^{r_0 x}$ jest także całką tego równania dla każdej wartości stałej C.

Całkę ogólną równania (22) znajdziemy metodą uzmienniania stałej. W tym celu szukamy rozwiązania równania (22) w postaci

$$y = C(x) e^{r_0 x} \qquad (26)$$

gdzie $C(x)$ jest nieznaną chwilowo funkcją

Stąd
$$\begin{cases} y' = C'(x) \cdot e^{r_0 x} + C(x) \cdot r_0 e^{r_0 x} \\ y'' = C''(x) \cdot e^{r_0 x} + 2 r_0 C'(x) e^{r_0 x} + r_0^2 C(x) e^{r_0 x} \end{cases} \qquad (27)$$

Podstawiając prawe strony wzorów (26) i (27) do równania (22) ~~[illegible]~~ a następnie dzieląc je obustronnie przez $e^{r_0 x}$ otrzymamy

$$C''(x) + (2r_0 + p) C'(x) + (r_0^2 + pr_0 + q) C(x) = 0$$

Ponieważ r_0 jest pierwiastkiem podwójnym równania $r^2 + pr + q = 0$ więc $2r_0 + p = 0$ oraz $r_0^2 + pr_0 + q = 0$. Zatem $C''(x) = 0$ dla każdego x

czyli $c(x) = C_1 x + C_2$.

Funkcja $y = (C_1 x + C_2)\cdot e^{r_0 x}$ spełnia zatem równanie (22) dla wszelkich wartości stałych C_1 i C_2.

W szczególności dla $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$. Czyli funkcja

$y_2 = x e^{r_0 x}$ jest całką tego równania

Zatem $y_1 = e^{r_0 x}$ oraz $y_2 = x e^{r_0 x}$ są całkami równania (22)

Czyli rozwiązaniem ogólnym równania (22) w przypadku $\Delta = 0$ jest

$$y = (C_1 x + C_2) e^{r_0 x} \qquad (28)$$

Przykład 8. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad (29)$$

Równanie charakterystyczne ma postać $r^2 + 4r + 4 = 0$

Pierwiastkiem podwójnym jest $r_0 = -2$. Zatem na podstawie wzoru (28) mamy całkę ogólną równania (29) postaci

$$y = (C_1 x + C_2) e^{-2x}$$

C. Przypadek $\Delta = p^2 - 4q < 0$

Równanie charakterystyczne ma w tym przypadku dwa różne pierwiastki zespolone sprzężone $r_1 = \alpha + i\beta$ i $r_2 = \alpha - i\beta$

Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej postaci

$y_1^*(x) = e^{(\alpha + i\beta)x}$ oraz $y_2^*(x) = e^{(\alpha - i\beta)x}$ są wtedy całkami równania (22)

Na podstawie wzoru Eulera $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ mamy

$$y_1^*(x) = e^{\alpha x}\cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x$$

Zatem $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ oraz $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ są także całkami równania (22)

Funkcja $y = e^{\alpha x}(C_1 \sin\beta x + C_2 \cos\beta x)$ jest całką ogólną równania (22).

Przykład 3. Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y''+y'+y=0 \qquad (30)$$

Równanie charakterystyczne jest postaci:

$$r^2+r+1=0$$

$$\Delta = 1-4=-3 \quad \sqrt{\Delta}=i\sqrt{3} \quad r_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},\ r_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Zatem $y_1^*(x)=e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}$ $\quad y_2^*(x)=e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}$

Wykorzystując wzór Eulera otrzymujemy

$$y_1^*(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\cdot e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x}=e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)=$$

$$=e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+ie^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Zatem $y_1(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $y_2(x)=e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x$ stanowią układ całek podstawowy dla równania (30)

Więc całka ogólna r-nia (30) jest postaci:

$$y=e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

<u>Definicja 4</u> (układ podstawowy całek równania różniczkowego)

Dwie całki $y_1(x)$ i $y_2(x)$ równania $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ w przedziale (a,b) nazywamy <u>układem podstawowym całek</u> tego równania jeżeli

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ dla każdego } x\in(a,b)$$

Wyznacznik powyższy nazywamy <u>wrońskianem</u> (ozn. $W(x)$).

Pojęcie wprowadził Józef Maria Wroński (1778 – 1853)

<u>Twierdzenie 2</u> Jeżeli funkcja $w=u(x)+iv(x)$ jest całką równania $y''+p(x)\cdot y'+q(x)\cdot y=0$ z rzeczywistymi współczynnikami $p(x)$ i $q(x)$ w przedziale (a,b), to jej część rzeczywista $u(x)$ i część urojona $v(x)$ są także całkami tego równania w przedziale (a,b).